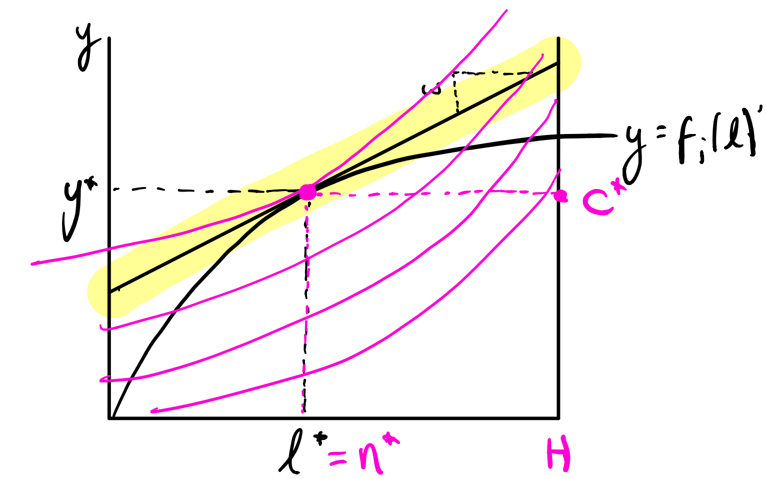
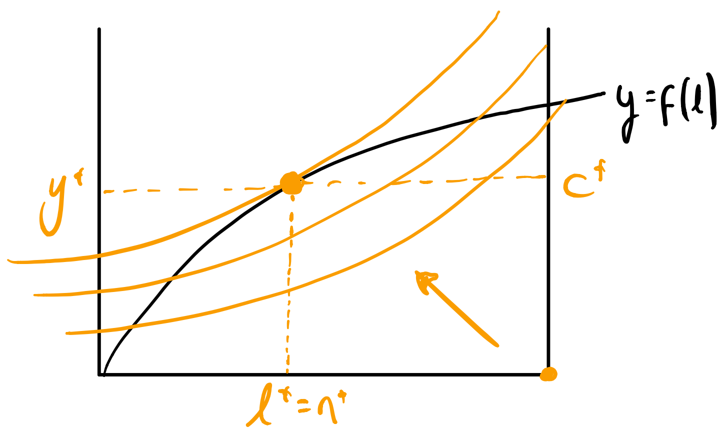
Maximización del bienestar social:



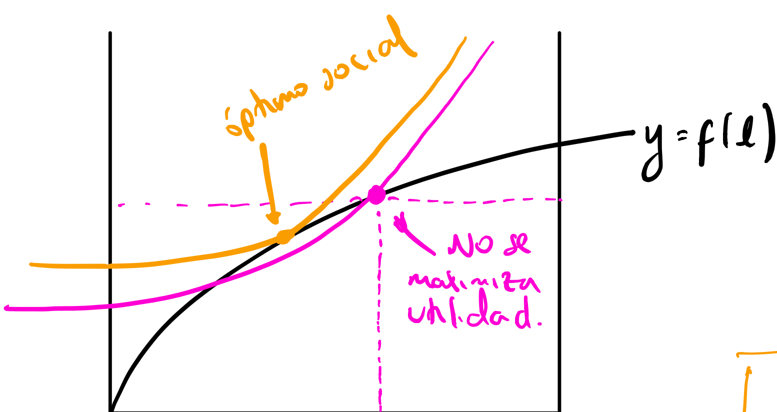
En eq. ω es tal que:

$$\boxed{\begin{aligned} c^* &= y^* \\ \ell^* &= n^* \end{aligned}}$$



- Primer teorema del bienestar:

un equilibrio competitivo es un óptimo social / óptimo de Pareto.



En el óptimo social:

curvas de indiferencia son tangentes a la función de producción:

$$MRS_{(c^*,h^*)} = f'(\ell^*)$$

$$\boxed{\frac{\frac{\partial u(c^*,h^*)}{\partial h}}{\frac{\partial u(c^*,h^*)}{\partial c}} = f'(\ell^*)}$$

En eq. competitivo: $\underbrace{\dfrac{\frac{\partial u(c^*,h^*)}{\partial h}}{\frac{\partial u(c^*,h^*)}{\partial c}}}_{\text{óptimo del consumidor}} = w$

$\underbrace{f'(\ell^*) = w}_{\text{óptimo de la firma.}}$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\frac{\partial u(c^*,h^*)}{\partial h}}{\frac{\partial u(c^*,h^*)}{\partial c}} = f'(\ell^*)}$$

El primer teorema del bienestar **FALLA**:

- Externalidades
- Impuestos distorsivos (lo veremos pronto)
- Bienes públicos.

Problema del planificador central:

$$\max_{c,h,n,\ell} u(c,h) \quad \text{s.a.} \quad \begin{aligned} h+n &= H \\ n &= \ell \\ c &= y \\ y &= f(\ell) \end{aligned}$$

$$\max_{c,h,\ell} u(c,h) \quad \text{s.a.} \quad \begin{aligned} h+\ell &= H \\ c &= f(\ell) \end{aligned}$$

$\boxed{\max_{\ell} u(f(\ell), H-\ell)}$ → problema del planificador central.

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial u}{\partial c}\left(f(\ell^*), H-\ell^*\right)\cdot\frac{\partial f(\ell^*)}{\partial \ell} + \frac{\partial u}{\partial h}\left(f(\ell^*), H-\ell^*\right)\cdot\overbrace{\cancel{\frac{\partial (H-\ell)}{\partial \ell}}}^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial c}\left(f(\ell^*), H-\ell^*\right)\cdot f'(\ell^*) = \frac{\partial u}{\partial h}\left(f(\ell^*), H-\ell^*\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial u(f(\ell^*), H-\ell^*)}{\partial h}}{\frac{\partial u(f(\ell^*), H-\ell^*)}{\partial c}} = f'(\ell^*), \quad \begin{matrix} c^* = f(\ell^*) \\ h^* = H-\ell^* \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\frac{\partial u(c^*, h^*)}{\partial h}}{\frac{\partial u(c^*, h^*)}{\partial c}}}_{MRS_{(c^*,h^*)}} = \underbrace{f'(\ell^*)}_{\text{productividad marginal del trabajo en } \ell^*}$$

Ej: • $y = A\ell^{1-\alpha}$, • $u(c,h) = \gamma \ln h + \ln c$

• Hay 1 individuo y 1 firma.

Problema del planificador central:

$$\max \ \gamma \ln h + \ln c \quad s.a. \quad h+\ell = H, \quad c = A\ell^{1-\alpha}$$

$$\max_{\ell} \ \gamma \ln(H-\ell) + \ln\left(A\ell^{1-\alpha}\right)$$

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\gamma}{H-\ell}\cdot(-1) + \frac{1}{\cancel{A}\ell^{1-\alpha}}\cdot(1-\alpha)\cancel{A}\cancel{\ell^{-\alpha}} = 0$$

$$\frac{(1-\alpha)}{\ell} = \frac{\gamma}{H-\ell} \iff (1-\alpha)(H-\ell) = \gamma \ell$$

$$\iff (1-\alpha)H - (1-\alpha)\ell = \gamma \ell$$

$$\iff (1-\alpha)H = (1-\alpha)\ell + \gamma \ell$$

$$= (1-\alpha+\gamma)\ell$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell^* = \frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}}$$

Si queremos "reconstruir" el equilibrio:

$$n^* = \ell^* \Rightarrow \boxed{n^* = \frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}}$$

$$y^* = A\ell^{*\,1-\alpha} \Rightarrow \boxed{y^* = A\left(\frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}\right)^{1-\alpha}}$$

$$c^* = y^* \Rightarrow \boxed{c^* = A\left(\frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}\right)^{1-\alpha}}$$

En equilibrio: $w^* = f'(\ell^*)$

$$\Rightarrow \boxed{w^* = A(1-\alpha)\left(\frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}\right)^{-\alpha}}$$

$$\pi^* = \alpha y^* \Rightarrow \boxed{\pi^* = \alpha A\left(\frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}\right)^{1-\alpha}}$$

$$\max_{c,h,l} \ \ln c + \gamma \ln h \quad \text{s.a.} \quad h + l = H$$
$$c = A l^{1-\alpha}$$

$$\max_{c,l} \ \ln c + \gamma \ln (H - l) \quad \text{s.a.} \quad c = A l^{1-\alpha}$$

$$\mathcal{L} = \ln c + \gamma \ln (H - l) + \lambda (A l^{1-\alpha} - c)$$

$$\left.\begin{array}{ll} [c]: & \dfrac{1}{c} - \lambda = 0 \\ [l]: & \dfrac{\gamma}{H-l} \cdot (-1) + (1-\alpha) \lambda A l^{-\alpha} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{1}{c} = \lambda \\ \dfrac{\gamma}{H-l} = (1-\alpha) A l^{-\alpha} \lambda \end{array}$$

$$[\lambda]: \quad A l^{1-\alpha} - C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\gamma}{H-l}}{\frac{1}{c}} = \frac{(1-\alpha) A l^{-\alpha} \cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\gamma c}{H-l}}_{\text{MRS}} = \underbrace{(1-\alpha) A l^{-\alpha}}_{\text{Prod. marg.}}}$$

$$\boxed{c = A l^{1-\alpha}}$$

Solución al planificador central:

① $\dfrac{\gamma c}{H-l} = (1-\alpha) A l^{-\alpha}$ → condición de eficiencia

② $y = A l^{1-\alpha}$ → condición de factibilidad

③ $c = y$ → condición de equilibrio.

Relación óptima entre c y ℓ está dada por la condición de eficiencia:

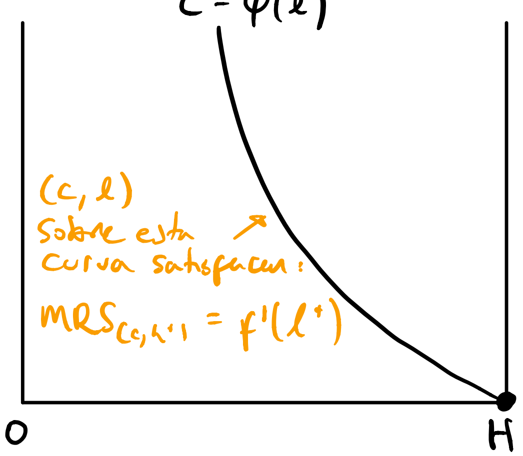
$$c = \frac{(1-\alpha)A\ell^{-\alpha}}{\gamma}(H-\ell)$$

$$\varphi(\ell) := \frac{(1-\alpha)A\ell^{-\alpha}}{\gamma}(H-\ell)$$

$$\boxed{c = \varphi(\ell)}$$

→ dado un ℓ, este es el consumo c tal que se cumple la condición de eficiencia:

$$\underbrace{MRS_{(c^*,h^*)}}_{\text{pendiente de curvas de indiferencia}} = \underbrace{f'(\ell^*)}_{\text{pendiente de función de producción.}}$$



$c = \varphi(\ell)$:

$$\varphi(\ell) = \frac{(1-\alpha)A\ell^{-\alpha}}{\gamma}(H-\ell)$$

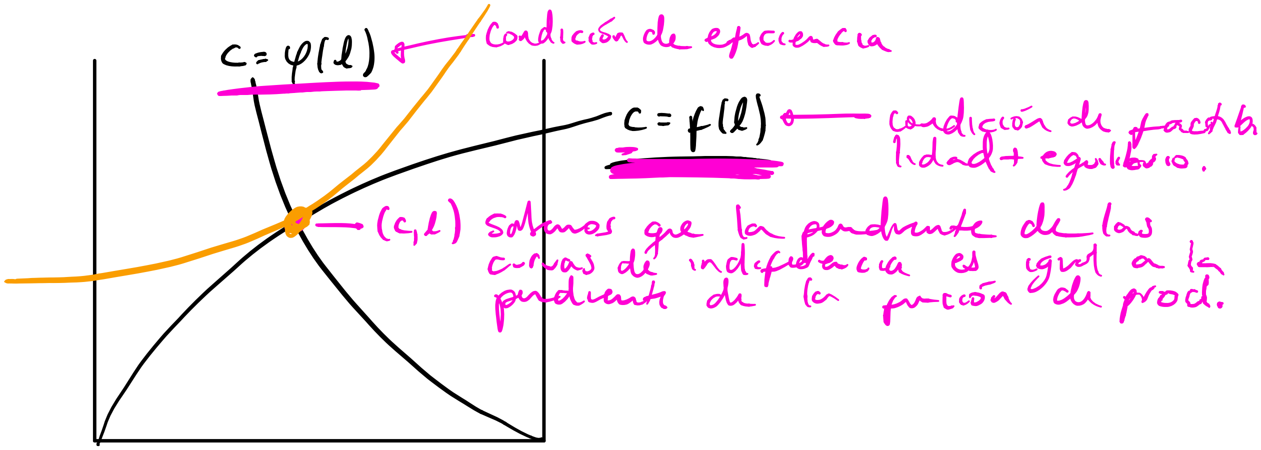
- $\varphi(H) = \frac{(1-\alpha)AH^{-\alpha}}{\gamma}(\cancel{H-H})^{0}$

$$= 0$$

- Pendiente de $\varphi(\ell)$:

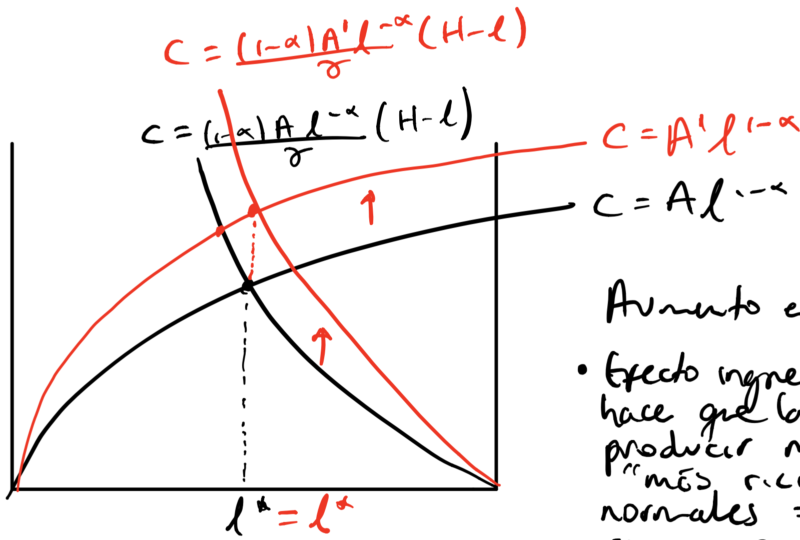
$$\varphi'(\ell) = \underbrace{\frac{-\alpha(1-\alpha)A\ell^{-\alpha-1}}{\gamma}(H-\ell)}_{<0} + \underbrace{\frac{(1-\alpha)A\ell^{-\alpha}}{\gamma}\cdot(-1)}_{<0} < 0$$

- $\varphi''(\ell) > 0$



Cambios en la tecnología A:

$l^* = \frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}$ $\longrightarrow$ no depende de A



$A' > A$

Aumento en A tiene 2 efectos:

- Efecto ingreso: Aumento en A hace que la economía pueda producir más $\Rightarrow$ individuo es "más rico". Como c, h son bienes normales $\Rightarrow$ individuo quiere consumir más (c, h).

  $\Rightarrow$ trabaja menos: l^* cae

- Efecto sustitución: Aumento en A aumenta la productividad marginal del trabajo ($f'(l) = (1-\alpha)A\, l^{-\alpha}$) $\Rightarrow$ aumenta w. $\Rightarrow$ aumenta el precio del ocio $\Rightarrow$ el individuo quiere consumir menos ocio y más consumo c.

  $\Rightarrow$ l^* aumenta

Con funciones de producción Cobb-Douglas, efecto ingreso y efecto sustitución se "cancelan"

$\Rightarrow$ l^* <u>NO</u> depende de A.

En los datos observamos: cuando y^* aumenta, l^* aumenta.

$$y^* = A\left(\frac{(1-\alpha)H}{1+\gamma-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

Si A aumenta $\Rightarrow$ y^* aumenta pero l^* no aumenta.

inconsistente con lo que observamos en los datos.

Qué ocurre si en vez de funciones Cobb Douglas, usamos funciones CES?

Tecnologías y preferencias CES (apéndice cap. 1).

(1) Asumamos que la función de utilidad es cobb-Douglas pero producción es CES: $y = \underbrace{\tilde{A}(\bar{k}^{\rho} + l^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}}_{\text{función CES}}$

$\tilde{A}$ = TFP, $\bar{k}$ = acervo de capital.

ρ toma valores entre $-\infty$ y 1, excluyendo cero.

- cuando $\rho \to 0$: la CES tiende a una Cobb-Douglas.
- cuando $\rho = 1$: $\bar{k}$ y l son sustitutos perfectos.
- cuando $\rho \to -\infty$: la CES tiende a Leontieff o complementos perfectos.

$\sigma = \frac{1}{1-\rho} \longrightarrow$ elasticidad de sustitución entre factores: ℓ y $\bar{k}$.

- $\rho \to 0 \Rightarrow \boxed{\sigma \to 1} \longrightarrow$ elasticidad de sustitución entre factores de Cobb-Douglas es igual a 1.

- $\rho \to 1 \Rightarrow \sigma \to \infty \Rightarrow$ los factores son perfectamente sustituibles.

- $\rho \to -\infty \Rightarrow \sigma \to 0 \Rightarrow$ los factores son muy poco sustituibles.

Problema de la firma: $w = f'(\ell)$.

$$f(\ell) = \tilde{A}\left(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$f'(\ell) = \frac{\tilde{A}}{\cancel{\rho}}\left(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \cancel{\rho}\,\ell^{\rho-1} = \tilde{A}\left(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1}\ell^{\rho-1}$$

multiplicando y dividiendo por $(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho})$:

$$f'(\ell) = \frac{\overbrace{\tilde{A}\left(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}}^{y}}{\left(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}\right)}\ell^{\rho-1} = \boxed{\frac{y\,\ell^{\rho-1}}{\left(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}\right)} = f'(\ell)}$$

Condición de eficiencia: $\frac{\gamma c^*}{H-\ell} = \frac{y^*\ell^{\rho-1}}{\left(\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}\right)}$

condición de equilibrio: $c^* = y^*$

$$\Rightarrow \frac{\gamma \cancel{c^*}}{H-\ell} = \frac{\cancel{y^*}\,\ell^{\rho-1}}{\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\gamma}{H-\ell} = \frac{\ell^{\rho-1}}{\bar{k}^{\rho} + \ell^{\rho}}}$$

ℓ^* resuelve esta ecuación.

l^* no depende de A.

$\Rightarrow \Delta$ en A <u>no</u> generan Δ en l^*.

es decir, con función de producción CES y utilidad Cobb-Douglas, EI y ES se siguen cancelando.

(2) Asumamos producción Cobb-Douglas y utilidad CES:

$$f(l) = A l^{1-\alpha}, \quad u(c,h) = \underbrace{h^{1-\frac{1}{\sigma}} + c^{1-\frac{1}{\sigma}}}_{CES.}$$

σ = elasticidad de sustitución entre h y C.

$$MRS = \frac{\partial u/\partial h}{\partial u/\partial c} \qquad \frac{\partial u}{\partial h} = \left(1-\frac{1}{\sigma}\right) h^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \left(1-\frac{1}{\sigma}\right) c^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\Rightarrow MRS = \frac{\cancel{\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)} h^{-\frac{1}{\sigma}}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)} c^{-1/\sigma}} = \left(\frac{c}{h}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$\Rightarrow$ condición de eficiencia: $\left(\frac{c}{h}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = (1-\alpha) A l^{-\alpha}$

$$\left(\frac{c}{H-l}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \cancel{(1-\alpha) A l^{-\alpha} \cdot l} \frac{}{l} = \frac{(1-\alpha) \overset{y}{A l^{1-\alpha}}}{l} = \frac{(1-\alpha) y}{l}$$

condición de equilibrio: $c^* = y^*$

$$\left(\frac{y}{H-l}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{(1-\alpha) y}{l} \Rightarrow \frac{y}{H-l} = \left(\frac{(1-\alpha) y}{l}\right)^{\sigma}$$

$$y = A l^{1-\alpha}$$

$$\frac{A l^{1-\alpha}}{H-l} = \left(\frac{(1-\alpha)A l^{1-\alpha}}{l}\right)^{\sigma}$$

$$A l^{1-\alpha} = \left(\frac{(1-\alpha)A l^{1-\alpha}}{l}\right)^{\sigma}(H-l)$$

$$A^{1-\sigma} = (H-l)\,(1-\alpha)^{\sigma}\quad l^{-\alpha\sigma-(1-\alpha)}$$

Cómo depende l^* de A?

$$(1-\sigma)A^{-\sigma} = (H-l)(1-\alpha)^{\sigma}\cdot\cancelto{-1}{\frac{\partial(H-l)}{\partial l}}\cdot\frac{\partial l}{\partial A}\cdot l^{-\alpha\sigma-(1-\alpha)}$$

$$+(H-l)(1-\alpha)^{\sigma}(-\alpha\sigma-(1-\alpha))\,l^{-\alpha\sigma-(1-\alpha)}\cdot\frac{\partial l}{\partial A}$$

$$\boxed{\frac{\partial l^*}{\partial A} = \frac{(\sigma-1)(1-\alpha)^{\sigma}A^{-\sigma}l^{\sigma\alpha+1-\alpha+1}}{l+(\sigma\alpha+1-\alpha)(H-l)}}$$

$\frac{\partial l^*}{\partial A} > 0$ cuando $\sigma > 1$ → nos interesa este caso.

$\frac{\partial l^*}{\partial A} < 0$ cuando $\sigma < 1$

$\frac{\partial l^*}{\partial A} = 0$ cuando $\sigma = 1$ → cobb-douglas

$\underline{\sigma > 1}$: elasticidad de sustitución entre c y h es alta.

EI: $\uparrow A$ individuos son más ricos $\Rightarrow \uparrow c, \uparrow h \Rightarrow \downarrow l$.

ES: $\uparrow A \Rightarrow \uparrow w \Rightarrow$ h se vuelve más costoso

$\Rightarrow$ individuo sustituye h con C. h cae mucho y c aumenta mucho porque h y c son altamente sustituibles.

$\Rightarrow$ l aumenta mucho.

$\Rightarrow$ en agregado l^* aumenta.

Es decir, con función de utilidad CES y $\sigma > 1$, cuando A aumenta, vemos que y^* aumenta y l^* aumenta que es lo que observamos en los datos.